

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (6 điểm)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$

b)
$$\begin{cases} 3x^3y = 8 - 2x^3 \\ xy^3 = 2x + 6 \end{cases}$$

Bài 2. (3 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ và điểm $A(0; -1) \in (C)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc đường tròn (C) sao cho ABC là tam giác đều.

Bài 3. (3 điểm)

Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \frac{12}{x} + \frac{32}{y}$.

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng: AM vuông góc với OI khi và chỉ khi $\frac{2}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Bài 5. (2 điểm)

Nhà toán học Hy Lạp cổ đại Archimedes đã tìm ra định luật về lực đẩy khi đang ngâm mình trong bồn tắm. Nhờ lực đẩy này, trọng lượng của một vật sẽ giảm đi khi ở trong nước. Biết rằng vàng nguyên chất trở nên nhẹ hơn $\frac{1}{20}$ lần và bạc nguyên

chất trở nên nhẹ hơn $\frac{1}{10}$ lần khi ở trong nước. Nếu một chiếc vương miện nặng

0,9kg (chỉ gồm vàng và bạc) và trở nên nhẹ hơn $\frac{1}{18}$ lần khi ở trong nước, hỏi có bao nhiêu bạc trong vương miện?

Bài 6. (3 điểm)

Trong một giải bóng đá có 6 đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt. Đội thắng được 3 điểm, hòa được 1 điểm và thua thì 0 điểm. Sau khi kết thúc giải, người ta thấy đội vô địch thua đúng một trận và có số điểm bằng tổng điểm của hai đội xếp nhì, ba và bằng tổng điểm của ba đội xếp cuối. Hãy tìm số điểm của đội vô địch và đội xếp cuối.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (6 điểm) Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a/ $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$ (*)

TH1: $\sqrt{2x^2 + x + 9} = \sqrt{2x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x = -4$ (không thỏa (*)) (0,5đ)

TH2: $\sqrt{2x^2 + x + 9} \neq \sqrt{2x^2 - x + 1}$

(*) $\Leftrightarrow \frac{2x + 8}{\sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1}} = x + 4$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1} = 2$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x + 9} = \sqrt{2x^2 - x + 1} + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 9 = 2x^2 - x + 5 + 4\sqrt{2x^2 - x + 1}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 2$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow 7x^2 - 8x = 0 \quad (x \geq -2)$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{7}$ (0,5đ)

b/ $\begin{cases} 3x^3y = 8 - 2x^3 \\ xy^3 = 2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 \\ x(y^3 - 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3y = \frac{8}{x^3} \\ y^3 - 2 = \frac{6}{x} \end{cases}$ (0,5đ)

Đặt $t = \frac{2}{x}$ ta có hệ tương đương

$\begin{cases} 2 + 3y = t^3 \\ y^3 - 2 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3y = t^3 \\ 2 + 3t = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y - t) + (y^3 - t^3) = 0 \\ 2 + 3t = y^3 \end{cases}$ (1,5đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ 2 + 3t = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ t = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ (1đ)

Bài 2. (3 điểm)

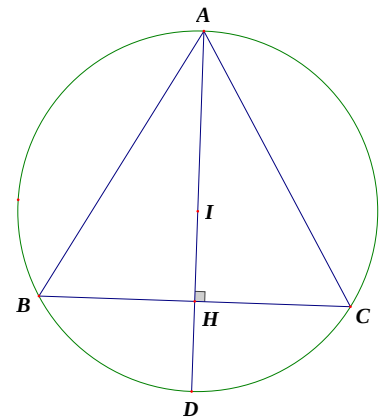
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ và điểm $A(0; -1) \in (C)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc đường tròn (C) sao cho ABC là tam giác đều.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$

Gọi D là điểm đối xứng với A qua I , suy ra $D(2; 5)$ (0,5đ)

Dễ dàng chứng minh rằng B, C nằm trên đường trung trực của ID (0,5đ)



Đường thẳng BC đi qua trung điểm $H(\frac{3}{2}; \frac{7}{2})$ của ID và có vtpt $\overrightarrow{ID} = (1; 3)$ có phương

$$\text{trình: } (x - \frac{3}{2}) + 3(y - \frac{7}{2}) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 12 = 0 \quad (1đ)$$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{7 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{7 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } B\left(\frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{7 + \sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}; \frac{7 - \sqrt{3}}{2}\right) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Hoặc } C\left(\frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{7 + \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}; \frac{7 - \sqrt{3}}{2}\right) \quad (0,5đ)$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \frac{12}{x} + \frac{32}{y}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta được:

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 \Rightarrow 3x + \frac{12}{x} \geq 12 \quad (1) \quad (0,5đ)$$

$$y + \frac{16}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{16}{y}} = 8 \Rightarrow 2y + \frac{32}{y} \geq 16 \quad (2) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Mặt khác từ giả thiết } x + y \leq 6 \text{ ta suy ra } -2x - 2y \geq -12 \quad (3) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được } P = x + \frac{12}{x} + \frac{32}{y} \geq 16 \quad (0,5đ)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x = 2, y = 4 \quad (0,5đ)$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } 16. \quad (0,5đ)$$

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng: AM vuông góc với OI khi và chỉ khi

$$\frac{2}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

Giải

Giải

Gọi x (kg) là khối lượng bạc trong vương miện. (0,5đ)

Suy ra $0,9 - x$ (kg) là khối lượng vàng trong vương miện. (0,5đ)

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{x}{10} + \frac{0,9 - x}{20} = \frac{0,9}{18} \Leftrightarrow \frac{x}{10} + \frac{0,9 - x}{20} = \frac{1}{20} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 0,9 - x = 1 \Leftrightarrow x = 0,1$$

Vậy có 0,1 kg bạc trong vương miện. (0,5đ)

Bài 6. (3 điểm)

Trong một giải bóng đá có 6 đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt. Đội thắng được 3 điểm, hòa được 1 điểm và thua thì 0 điểm. Sau khi kết thúc giải, người ta thấy đội vô địch thua đúng một trận và có số điểm bằng tổng điểm của hai đội xếp nhì, ba và bằng tổng điểm của ba đội xếp cuối. Hãy tìm số điểm của đội vô địch và đội xếp cuối.

Giải

Đội vô địch đá 5 trận, thua 1 trận nên có điểm tối đa là 12. (0,5đ)

Xét 5 đội còn lại, họ đá với nhau 10 trận, mỗi trận được ít nhất 2 điểm nên tổng điểm của các đội này ít nhất là 20 điểm. Ngoài ra họ còn có 3 điểm lấy từ trận thắng đội vô địch. Vì thế tổng điểm ít nhất là 23. (0,5đ)

Theo đề bài thì điểm của đội vô địch bằng tổng điểm của 2 đội thứ 2,3 và tổng điểm của 3 đội thứ 4,5,6 nên điểm của đội vô địch bằng phân nửa tổng điểm của 5 đội còn lại. Vì vậy điểm của đội vô địch ít nhất là 11,5. (0,5đ)

Do điểm là số nguyên nên đội vô địch có 12 điểm (không có trận hòa) và tổng điểm của 2 đội thứ 2,3 và thứ 4,5,6 cũng là 12 điểm. (0,5đ)

Mặt khác do tổng điểm của 6 đội là 36 nên có tất cả 9 trận hòa. (0,5đ)

Trong nhóm 5 đội còn lại, có 9 trận hòa lẫn nhau, 1 trận thắng thua lẫn nhau và mỗi đội có tối đa 4 trận hòa. Vì vậy có nhiều nhất 2 đội từ 5 điểm trở lên (có tối đa 2 trận thắng). Hai đội đó dĩ nhiên là đội thứ 2 và đội thứ 3. Suy ra 3 đội cuối bảng có điểm tối đa là 4. Vì thế mỗi đội có 4 điểm. Vậy đội cuối bảng có 4 điểm. (0,5đ)

Trên thực tế tình huống này có thể xảy ra với cách sắp xếp sau:

A thua B và thắng C, D, E, F được 12 điểm.

B thắng A, thua C, hòa D, E, F được 6 điểm.

C thua A, thắng B, hòa D, E, F được 6 điểm.

D, E, F thua A, hòa B, C và hòa lẫn nhau được 4 điểm.